

Analiza Algorytmów - Wykład 6

1 Funkcje tworzące

"Funkcja tworząca to sznur do bielizny, na którym wieszamy ciąg liczbowy"
- H.S. Wilf (1989)

1.1 Funkcje tworzące - definicja i podstawowe własności

Niniejszy wykład poświęcony jest funkcjom tworzącym, które stanowią bardzo wygodne narzędzie, służące do działań na ciągach liczbowych. Idea wykorzystania funkcji tworzących jest następująca: chcemy z każdym ciągiem liczbowym, związać pewną funkcję tak, aby podstawowe operacje na ciągach odpowiadały prostym operacjom na związanych z nimi funkcjach. Nie trzeba chyba nikogo przekonywać, że o wiele łatwiej jest działać na pojedynczym obiekcie jakim jest funkcja (zmiennej rzeczywistej lub zespolonej) niż operować na ciągach złożonych z wielu elementów. Zwłaszcza, że analityczne metody działania na funkcjach zmiennej rzeczywistej lub zespolonej są często o wiele prostsze i silniejsze niż metody kombinatoryczne działające bezpośrednio na ciągach. Wobec tego będziemy przyporządkowywać ciągowi funkcję według poniższej definicji:

Definicja 1. Niech dany będzie ciąg liczbowy $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$. Funkcję

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

nazywamy (zwykłą) funkcją tworzącą ciągu $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Funkcje tworzące znajdują szerokie zastosowanie w analizie algorytmów, szczególnie przy wyznaczaniu wartości skomplikowanych sum i jawnych wzorów dla ciągów zdefiniowanych za pomocą rekursji. Na uwagę zasługuje fakt, iż metoda wyznaczania rozwiązań rekurencji oparta na funkcjach tworzących może być wykorzystana zarówno w przypadku dość prostych rekurencji pierwszego rzędu, czy też liniowych rekurencji wyższych rzędów ze stałymi współczynnikami, jak i dla nieliniowych rekurencji, w których następny wyraz zależy od wszystkich poprzednich (tzw. rekurencje z pełną historią). W tych przypadkach trudno sobie wyobrazić wyznaczenie rozwiązania bez użycia funkcji tworzących, gdyż zastosowanie na przykład metody iteracyjnej prowadzi do bardzo skomplikowanych wyrażeń, zaś metoda podstawiania wymaga dużego doświadczenia,

aby znaleźć potencjalne rozwiązanie. Ważne jest również, że schemat uzyskiwania rozwiązań rekurencji za pomocą funkcji tworzący jest zawsze taki sam, niezależnie od postaci rekursji - zawsze dążymy do tego, by znaleźć funkcję tworzącą ciągu danego rekurencyjnie. Pewne trudności pojawiają się dopiero wówczas, gdy wyznaczamy jawny wzór ciągu reprezentowanego przez otrzymaną funkcję, gdyż wymaga to umiejętności poszukiwania funkcji tworzących podstawowych ciągów. Warto też mieć "pod ręką" przykłady elementarnych funkcji tworzących. Kilka z nich podajemy poniżej:

Ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	Funkcja tworząca $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$
$1, 1, \dots, 1, \dots$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$
$0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$	$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n \geq 1} n z^n$
$0, \dots, 0, 1, M+1, \dots, \binom{n}{M}, \dots$	$\frac{z^M}{(1-z)^{M+1}} = \sum_{n \geq M} \binom{n}{M} z^n$
$1, M, \binom{M}{2}, \dots, \binom{M}{N}, \dots, M, 1$	$(1+z)^M = \sum_{n \geq 0} \binom{M}{n} z^n$
$1, M+1, \binom{M+2}{2}, \binom{M+3}{3}, \dots$	$\frac{1}{(1-z)^{M+1}} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+M}{n} z^n$
$1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots$	$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n \geq 0} z^{2n}$
$1, c, c^2, \dots, c^n, \dots$	$\frac{1}{1-cz} = \sum_{n \geq 0} c^n z^n$
$1, 1, \frac{1}{2!}, \dots, \frac{1}{n!}, \dots$	$e^z = \sum_{N \geq 0} \frac{z^N}{N!}$
$0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$	$\ln \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$
$0, 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, H_n, \dots$	$\frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 1} H_n z^n$
$0, 0, 1, 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right), 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right), \dots$	$\frac{z}{(1-z)^2} \ln \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} n(H_n - 1) z^n$

Patrząc na definicję funkcji tworzącej pojawia się pytanie o zbieżność rozpatrywanego szeregu. Oczywiście w wielu książkach dotyczących analizy matematycznej można znaleźć szeroko omówioną teorię szeregów potęgowych. Dla wygody czytelnika, na końcu tego wykładu zostaną podane podstawowe informacje dotyczące szeregów potęgowych i rozwijania funkcji w szereg Maclaurina. Zauważmy jeszcze, że jeśli tylko potrafimy znaleźć rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy, to odkrywamy funkcję tworzącą ciąg współczynników tego rozwinięcia. (Nie należy jednak wpadać w szpony przerażenia, że jest to zawsze jedyna metoda postępowania.) Pokażemy, że w wielu przypadkach wystarczy znajomość własności szeregu potęgowego i podstawowych operacji na funkcjach tworzących, o których mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2. Niech dane będą dwa ciągi $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reprezentowane przez, odpowiednio, $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ oraz $B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$.

Następujące operacje generują funkcje tworzące reprezentujące poniższe

ciągi

1. sumowanie:

$$A(z) + B(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$$

jest funkcją tworzącą dla ciągu

$$a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots$$

2. przesunięcie w prawo:

$$zA(z) = \sum_{n \geq 1} a_{n-1} z^n$$

jest funkcją tworzącą dla ciągu

$$0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots$$

3. przesunięcie w lewo:

$$\frac{A(z) - a_0}{z} = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} z^n$$

jest funkcją tworzącą dla ciągu

$$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, \dots$$

4. mnożenie przez indeks (różniczkowanie):

$$A'(z) = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$$

jest funkcją tworzącą dla ciągu

$$a_1, 2a_2, \dots, (n+1)a_{n+1}, \dots$$

5. dzielenie przez indeks (całkowanie):

$$\int_0^z A(t) dt = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$$

jest funkcją tworzącą dla ciągu

$$0, a_0, \frac{a_1}{2}, \dots, \frac{a_{n-1}}{n}, \dots$$

6. skalowanie:

$$A(\lambda z) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n a_n z^n$$

jest funkcją tworzącą dla ciągu

$$a_0, \lambda a_1, \lambda^2 a_2, \dots, \lambda^n a_n, \dots$$

7. różnica:

$$(1 - z) A(z) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n-1}) z^n$$

jest funkcją tworzącą dla ciągu

$$a_0, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_{n-1}, \dots$$

8. mnożenie(splot)

$$A(z)B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k} \right) z^n$$

jest funkcją tworzącą dla ciągu

$$a_0 b_0, a_1 b_0 + a_0 b_1, \dots, \sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k}, \dots$$

9. sumy częściowe:

$$\frac{A(z)}{(1-z)} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} a_k \right) z^n$$

jest funkcją tworzącą dla ciągu

$$a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots, \sum_{0 \leq k \leq n} a_k, \dots$$

Dowód: Ponieważ większość tych operacji można zweryfikować poprzez proste rachunki dowodzić będziemy jedynie dwóch ostatnich równości. W tym celu obliczmy

$$A(z)B(z) = \sum_{i \geq 0} a_i z^i \sum_{j \geq 0} b_j z^j = \sum_{i, j \geq 0} a_i b_j z^{i+j}$$

co po zgrupowaniu i uporządkowaniu współczynników przy z w tej samej potęgde daje żądaną równość. Aby udowodnić własność 9. wystarczy położyć $B(z) = \frac{1}{(1-z)}$, która jest funkcją tworzącą ciągu $\{1, 1, \dots, 1, \dots\}$ i zastosować punkt 8. ■

Jak widać w powyższym twierdzeniu nie pojawiły się ani założenia dotyczące funkcji (nawet tam, gdzie mówimy o różniczkowaniu, czy całkowaniu) ani

zbieżności samych szeregów. Każdy matematyk zdręży z prerażenia widząc takie sformułowania, zatem musimy się usprawiedliwić, dlaczego operacje na funkcjach tworzących sprowadzamy do czysto formalnych przekształceń odpowiednich wzorów, nie martwiąc się, czy możemy je wykonać. Warto jednak pamiętać, że

- po pierwsze, jeśli szereg $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ będzie rozbieżny dla każdego $z \neq 0$, to możemy rozważyć szereg $A(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$, operując tzw. wykładniczą funkcją

tworzącą omówioną poniżej;

-po drugie *"nie zawsze warto martwić się zbieżnością szeregu, ponieważ w istocie badamy jedynie możliwe podejścia do rozwiązania problemu. Jeśli w jakikolwiek sposób odkryjemy rozwiązanie, to możemy je później należycie potwierdzić"* (D.E. Knuth, "Sztuka programowania" tom 1).

Przykład. Pokażemy, że funkcja tworząca ciąg liczb harmoniczych $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ma następującą postać

$$\frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 1} H_n z^n.$$

Istotnie, wiemy, że funkcją tworzącą ciąg $\{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$ jest

$$B(z) := \frac{1}{1-z} = \sum_{N \geq 0} z^N.$$

Całkując (własność 5) obie strony równości $\frac{1}{1-z} = \sum_{N \geq 0} z^N$ mamy

$$A(z) := -\ln(1-z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} z^{n+1}.$$

Korzystając teraz z punktu 9. dla funkcji A otrzymujemy

$$\frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} \right) z^n = \sum_{n \geq 1} H_n z^n.$$

(Zauważmy, że dla każdego $z \in (-1, 1)$ wszystkie powyższe szeregi są zbieżne bezwzględnie, a ponadto w każdym przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle \subset (-1, 1)$ są one również zbieżne jednostajnie.)

1.2 Rozwiązywanie rekurencji za pomocą funkcji tworzących

Rozpoczniemy od prostego przykładu, który pozwoli nam wyjaśnić ogólną ideę wykorzystania funkcji tworzących do wyznaczania jawnych wzorów ciągów danych rekurencyjnie, bez konieczności rozstrzygania skomplikowanych problemów rachunkowych. Identyczny schemat zastosujemy dla rekurencji liniowych wyższych

rzędów (twierdzenie 3) oraz rekurencji nieliniowych z pełną historią (wykład 8).

Przykład. Rozwiązać rekurencję

$$a_n = a_{n-1} + 1 \quad (1)$$

dla $n \geq 1$ z $a_0 = 0$.

Dla każdego $n \geq 1$ pomnożmy obie strony wzoru (1) przez z^n . Otrzymujemy wówczas ciąg równości

$$a_n z^n = a_{n-1} z^n + z^n,$$

który wysumujemy po wszystkich $n \geq 1$:

$$\sum_{n \geq 1} a_n z^n = \sum_{n \geq 1} a_{n-1} z^n + \sum_{n \geq 1} z^n.$$

Położmy $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Zatem

$$A(z) = zA(z) + \frac{z}{1-z}.$$

Funkcja tworząca szukanego ciągu spełnia powyższą równość, która pozwala wyznaczyć $A(z)$

$$A(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Ponieważ $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n \geq 1} n z^n$ (patrz przykłady elementarnych funkcji tworzących zamieszczone powyżej), mamy $a_n = n$ dla $n \geq 0$.

Twierdzenie 3. Jeżeli $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia rekurencję

$$a_n = x_1 a_{n-1} + x_2 a_{n-2} + \dots + x_t a_{n-t} \quad \text{dla } n \geq t$$

wówczas funkcja tworząca $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ jest postaci

$$a(z) = \frac{f(z)}{g(z)},$$

gdzie

$$g(z) = 1 - x_1 z - x_2 z^2 - \dots - x_t z^t,$$

natomiast f jest wielomianem zdeteminowanym przez wartości początkowe wyrazów ciągu a_0, \dots, a_{t-1} .

Dowód: Przeprowadzimy rozumowanie analogiczne do zaprezentowanego w przykładzie, tj. pomnożymy obie strony rekurencji przez z^n i zsumujemy otrzymany ciąg równości dla $n \geq t$. Uzyskujemy wówczas

$$\sum_{n \geq t} a_n z^n = x_1 \sum_{n \geq t} a_{n-1} z^n + x_2 \sum_{n \geq t} a_{n-2} z^n + \dots + x_t \sum_{n \geq t} a_{n-t} z^n.$$

Zauważmy, że lewa strona równości jest różnicą funkcji $a(z)$ oraz pewnego wielomianu u_0 zdefiniowanego przez warunki początkowe:

$$\sum_{n \geq t} a_n z^n = a(z) - u_0(z),$$

gdzie

$$u_0(z) := (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{t-1} z^{t-1}).$$

Dalej: pierwszy składnik po prawej stronie równości jest równy $x_1 z a(z)$ odjąć odpowiedni wielomian u_1

$$x_1 \sum_{n \geq t} a_{n-1} z^n = x_1 z a(z) - u_1(z),$$

gdzie

$$u_1(z) := x_1 z (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{t-2} z^{t-2}).$$

itd. Stąd mamy

$$a(z) - u_0(z) = (x_1 z a(z) - u_1(z)) + \dots + (x_{t-1} z^{t-1} a(z) - u_t(z)) + x_t z^t a(z),$$

gdzie współczynniki każdego z wielomianów u_k zależą od warunków początkowych zaś stopień nie przekracza $t - 1$. Otrzymaliśmy w ten sposób równanie liniowe względem $a(z)$. Przekształcając je mamy

$$a(z) (1 - x_1 z - x_2 z^2 - \dots - x_t z^t) = u_0(z) - u_1(z) - \dots - u_{t-1}(z)$$

i dalej

$$a(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

z f daną następująco

$$f(z) = u_0(z) - u_1(z) - \dots - u_{t-1}(z).$$

Współczynniki w wielomianie f zależą tylko od warunków początkowych, a jego stopień jest nie przekracza $t - 1$. ■

Uwaga: Powyższa ogólna postać pozwala uzyskać alternatywne sformułowanie zależności f od warunków początkowych. Zauważmy, że z relacji $f(z) = a(z)g(z)$ i faktu, iż stopień f jest mniejszy niż t wynika następująca równość

$$f(z) = g(z) \sum_{0 \leq n < t} a_n z^n \pmod{z^t}.$$

Pozwala to skrócić proces wyznaczania współczynników wielomianu f , co daje szybki sposób wyznaczania dokładnego rozwiązania rekurencji.

1.3 Wykładnicze funkcje tworzące

(Osoby mniej zainteresowane matematyką mogą pominąć tę część wykładu.) W wielu książkach poświęconych algorytmom i strukturom danych znajdziemy rozdział lub chociaż paragraf poświęcony analizie algorytmów. Tam wprowadzane są funkcje tworzące określone tak jak w definicji 1. W literaturze poświęconej analizie algorytmów (np. R. Sedgewick & P. Flajolet, "An Introduction to the Analysis of Algorithms") autorzy funkcję daną definicją 1 nazywają **zwyczajną funkcją tworzącą** w odróżnieniu od **wykładniczych funkcji tworzących**, których współczynniki zawierają charakterystyczny element $\frac{1}{n!}$ (wspominaliśmy o min wcześniej, przy dyskusji dotyczącej zbieżności szeregów opisujących funkcję). Oczywiście w każdym z tych przypadków możemy pominąć przymiotniki określające rodzaj funkcji tworzącej i posługiwać się twierdzeniem 2 dokonując jakichkolwiek operacji na tych funkcjach. Dlaczego więc kolejna definicja i porcja wzorów? Odpowiedź jest następująca: warto mieć gotowe schematy postępowania jeśli okaże się, że ze względu na brak zbieżności szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ nie możemy dokonywać pewnych przekształceń, a badając szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$ dostajemy informacje o ciągu $\{ \frac{a_n}{n!} \}_{n \in \mathbb{N}}$ nie zaś o $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, którym jesteśmy zainteresowani. Oczywiście można te informacje wydobyć poprzez dodatkowe rachunki. Wobec tego jeśli komuś one nie przeszkadzają może spokojnie pominąć ten rozdział. Tym, którzy lubią mieć "pod ręką" gotowe wzory i schematy działania proponujemy zapoznanie się z tą częścią wykładu.

Definicja 4. Niech dany będzie ciąg liczb $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$. Funkcję

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^k}{k!}$$

nazywamy **wykładniczą funkcją tworzącą** ciągu $\{a_n\}$.

Przykłady. Podamy teraz przykłady elementarnych wykładniczych funkcji tworzących

Ciąg $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$	Wykładnicza funkcja tworząca $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$
$1, 1, \dots, 1, \dots$	$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$
$0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$	$ze^z = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{(n-1)!}$
$0, 0, 1, 3, 6, 10, \dots, \binom{n}{2}, \dots$	$\frac{1}{2}z^2e^z = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \frac{z^n}{(n-2)!}$
$0, \dots, 0, 1, M+1, \dots, \binom{n}{M}, \dots$	$\frac{1}{M!}z^Me^z = \frac{1}{M!} \sum_{n \geq M} \frac{z^n}{(n-M)!}$
$1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots$	$\frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{n \geq 0} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{z^n}{n!}$
$1, c, c^2, \dots, c^N, \dots$	$e^{cz} = \sum_{n \geq 0} \frac{c^n z^n}{n!}$
$0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots$	$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(n+1)!}$
$1, 2, 6, 24, \dots, n!, \dots$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} \frac{n! z^n}{n!}$

Twierdzenie 5. Niech dane będą dwa ciągi $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i odpowiadające im funkcje $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$ oraz $B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{z^n}{n!}$. Następujące operacje generują wykładnicze funkcje tworzące reprezentujące poniższe ciągi

1. sumowanie:

$$A(z) + B(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$$

jest funkcją tworzącą dla ciągu

$$a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots$$

2. przesunięcie w prawo (całkowanie):

$$\int_0^z A(t) dt = \sum_{n \geq 1} a_{n-1} \frac{z^n}{n!}$$

jest funkcją tworzącą dla ciągu

$$0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots$$

3. przesunięcie w lewo (różniczkowanie):

$$A'(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \frac{z^n}{n!}$$

jest funkcją tworzącą ciągu

$$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, \dots$$

4. mnożenie przez indeks:

$$zA(z) = \sum_{n \geq 1} n a_{n-1} \frac{z^n}{n!}$$

jest funkcją tworzącą ciąg

$$0, a_0, 2a_1, \dots, n a_{n-1}, \dots$$

5. dzielenie przez indeks:

$$\frac{A(z) - a_0}{z} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{n+1} \frac{z^n}{n!}$$

jest funkcją tworzącą ciąg

$$a_1, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_{n+1}}{(n+1)}, \dots$$

6. różnica:

$$A'(z) - A(z) = \sum_{n \geq 0} (a_{n+1} - a_n) \frac{z^n}{n!}$$

jest funkcją tworzącą ciąg

$$a_1 - a_0, \dots, a_{n+1} - a_n, \dots$$

7. spłot (mnożenie):

$$A(z)B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{z^n}{n!}$$

jest funkcją tworzącą ciąg

$$a_0 b_0, a_1 b_0 + a_0 b_1, \dots, \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}, \dots$$

8. sumy częściowe:

$$e^z A(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} a_k \right) \frac{z^n}{n!}$$

jest funkcją tworzącą ciąg

$$a_0, a_0 + a_1, \dots, \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} a_k, \dots$$

Dowód własności 7. Korzystając z odpowiedniej własności dla zwyczajnych funkcji tworzących (twierdzenie 2 p.8) mamy

$$A(z)B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{z^n}{n!}.$$

■

1.4 Liczby i wielomiany Bernoulli'ego

Definicja 6. Liczby B_i , $i \in \mathbb{N}$, mające tę własność, że ciąg $\{\frac{B_i}{i!}\}_{i \in \mathbb{N}}$ generuje funkcję tworzącą $z/(e^z - 1)$ nazywamy liczbami Bernoulli'ego.

(We wspomnianej wcześniej książce "An Introduction to the Analysis of Algorithms" B_i definiowane są jako wyrazy ciągu generującego wykładniczą funkcję tworzącą, ponieważ jednak niektóre osoby mogły pominąć poprzedni rozdział, w tej części będziemy posługiwać się informacjami zawartymi w rozdziale 1.)

Aby wyznaczyć liczby Bernoulli'ego skorzystamy z rozwinięcia

$$e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$$

i następującej równości

$$z = \left(B_0 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \frac{B_4}{4!} z^4 + \frac{B_5}{5!} z^5 + \dots \right) \cdot \left(z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{4!} z^4 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots \right).$$

Przez porównanie współczynników otrzymujemy:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6} \dots$$

Jak pokażemy w następnym wykładzie w wielu zastosowaniach można się zadowolić kilkoma pierwszymi liczbami B_i .

Definicja 7. Wielomiany postaci

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k x^{m-k}$$

nazywamy wielomianami Bernoulli'ego.

Stwierdzenie 8. Ciąg $\{B_m(x)/m!\}_{m \in \mathbb{N}}$ generuje następującą funkcję tworzącą

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{z^k}{k!} = \frac{z}{e^z - 1} e^{xz}.$$

Dowód: Istotnie, korzystając z twierdzenia 2 (punkt 8.) lub z twierdzenia 5 (punkt 7.), otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{z^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_k x^{m-k} \right] \frac{z^m}{m!} = A(z)B(z)$$

dla

$$A(z) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{z^m}{m!} = \frac{z}{e^z - 1}$$

oraz

$$B(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \frac{z^m}{m!} = e^{xz}.$$

Stąd uzyskujemy żadaną równość.

Stwierdzenie 9. Z definicji liczb i wielomianów Bernoulli'ego wynikają następujące fakty

1. Dla każdego $m > 1$

$$B'_m(x) = mB_{m-1}(x).$$

2. Dla wszystkich nieparzystych liczb naturalnych $m \geq 3$: $B_m = 0$.
3. Dla każdego $m > 1$:

$$B_m(0) = B_m(1) = B_m.$$

Dowód: Dowód pozostawiamy Czytelnikowi - Zadanie 5. ■